BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

CLASA a VII-a

1. Arătați că dacă $a,b,c>0$ verifică $\frac{a^2+b^2}{c(a+b)}=\frac{b^2+c^2}{a(b+c)}=\frac{c^2+a^2}{b(c+a)}$, atunci $a=b=c$.

Soluţie şi barem:

OFICIU	**1p**
$\frac{a^2+b^2}{c(a+b)}=\frac{b^2+c^2}{a(b+c)}=\frac{c^2+a^2}{b(c+a)}=\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=$	**2p**
$=\frac{c^2}{ab}=\frac{a^2}{bc}=\frac{b^2}{ca}=$	**3p**
$=\frac{c^3}{abc}=\frac{a^3}{abc}=\frac{b^3}{abc}\Rightarrow$	**2p**
$\Rightarrow a^3=b^3=c^3\Rightarrow a=b=c$	**2p**

2. Să se determine numerele naturale x,y,z astfel încât $11^x-2^y=z^2=7^x+2^y$.

Soluţia 1 şi barem:

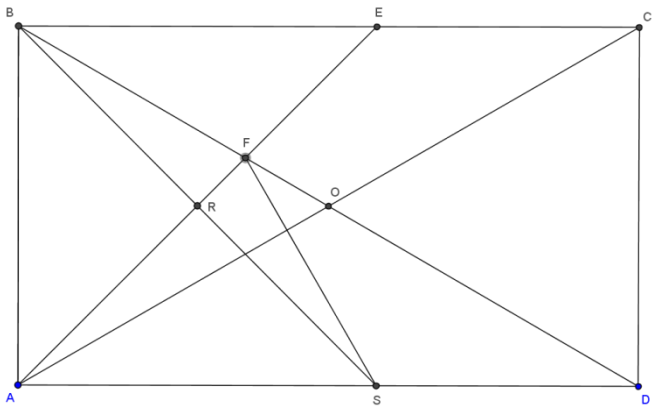
OFICIU	**1p**
Din relația $11^x-2^y=7^x+2^y$, rezultă $11^x-7^x=2^{y+1}$. **(1)**	**1p**
Modulo 3 obținem $(-1)^x-1=(-1)^{y+1}$, de unde x este impar, deci $(-1)^{y+1}=-2=1(\text{mod}3)$, adică și y este impar.	**2p**
Dacă $y\geq 2$, atunci $2^{y+1}\equiv 0(\text{mod}8)$ și ecuația **(1)** devine $3^x-(-1)^x=0(\text{mod}8)$; cum x este impar, deci $x=2a+1$, cu $a\in\mathbb{N}$, obținem $3^{2a+1}-(-1)\equiv 0(\text{mod}8)$, deci $3\cdot 9^a\underset{\equiv 1}{\equiv}-1(\text{mod}8)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3\equiv 7(\text{mod}8)$, fals. Așadar $y\in\{0;1\}$ și cum y este impar deducem că $y=1$.	**4p**
Prin urmare rezultă ecuația $11^x=7^x+4$, cu soluția $x=1$. Dacă ultima ecuație ar avea și alte soluții s-ar obține $\left(\frac{7}{11}\right)^x+\frac{4}{11^x}=1$, ceea ce este fals, câtă vreme, pentru $x>2$, rezultă $\left(\frac{7}{11}\right)^x+\frac{4}{11^x}<\left(\frac{7}{11}\right)^2+\frac{4}{11^2}=\frac{53}{121}<1$. Așadar $y=1$, $x=1$ și deci $z=3$. Sau se putea utiliza faptul că $(a+b)^n>a^n+b^n$, pentru orice $a,b\in\mathbb{N}^*$ și pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.	**2p**

Soluția 2 și barem:

OFICIU	**1p**
Din relația $11^x-2^y=7^x+2^y$, avem $11^x-7^x=2^{y+1}$ **(1)** Pentru $x=0$, obținem $2^{y+1}=0$, ceea ce nu este posibil. Pentru $x=1$, obținem $y=1$ și $z=3$.	**1p**
Presupunem în continuare că $x\geq 2$. Avem $11=\mathcal{M}_8+3$ și $7=\mathcal{M}_8-1$. Arătăm că x este număr natural par. Dacă x este impar, $x\geq 3$, atunci $11^x=\mathcal{M}_8+3$ și $7^x=\mathcal{M}_8-1$, deci $11^x-7^x=\mathcal{M}_8+4$. Prin urmare $2^{y+1}=\mathcal{M}_8+4$, adică $y=1$. În aceste condiții **(1)** devine $11^x-7^x=4$, ceea ce nu este posibil pentru că $11^x-7^x=4\left(11^{x-1}+\ldots+7^{x-1}\right)\geq 4\left(11^2+7^2\right)>4$. Prin urmare $x\geq 2$ este număr natural par. Fie $x=2n$, $n\in\mathbb{N}^*$.	**4p**
Relația **(1)** devine $\left(11^n-7^n\right)\left(11^n+7^n\right)=2^{y+1}$ **(2)** Fie $d=\left(11^n-7^n;11^n+7^n\right)$, care este număr par. Rezultă că $d\mid\left(11^n-7^n+11^n+7^n\right)$, adică $d\mid 2\cdot 11^n$. Deoarece $d\mid 2\cdot 11^n$, $d\mid 2^{y+1}$, 11^n este impar și d este par, rezultă că $d=2$.	**2p**
În aceste condiții, din **(2)**, obținem $\begin{cases}11^n-7^n=2\\11^n+7^n=2^y\end{cases}$ **(3)** Prin adunarea celor două relații rezultă $11^n=1+2^{y-1}$ sau $11^n-1=2^{y-1}$ sau $10\left(11^{n-1}+11^{n-2}+\ldots+11+1\right)=2^{y-1}$, ceea ce nu este posibil pentru că 2^{y-1} nu se divide prin 10. În concluzie soluția ecuației este $x=y=1, z=3$.	**2p**

3. În dreptunghiul $ABCD$ se consideră $[AE$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$, cu $E\in(BC)$. Dacă $AE\cap BD=\{F\}$ și $(BF)\equiv(EC)$, atunci determinați măsura unghiului $\sphericalangle EAC$.

Soluție și barem:



OFICIU	**1p**
Fie $BS \perp AE$, $S \in AD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $BS \cap AE = \{R\}$. În triunghiul *BAS*, $[AR]$ este bisectoare și înălțime, deci $AB = AS$ și rezultă că *AR* este mediatoarea segmentului $[BS]$. Triunghiul *ABE* este dreptunghic isoscel, deci $AB = BE$. Rezultă $AS = AB = BE$. Deoarece $AD = BC$ și $BE < BC$ deducem că $AS < AD$, deci $S \in (AD)$ și $SD = EC$.	**4p**
Avem $FB = FS$, întrucât *AR* este mediatoarea segmentului $[BS]$ și $F \in AR$; dar $BF = EC = SD$, deci $FS = SD$ și prin urmare triunghiul *FSD* este isoscel. $\sphericalangle FSA$ este exterior triunghiului isoscel *FSD*, deci $m(\sphericalangle FSA) = 2 \cdot m(\sphericalangle SDF)$. **(1)** $\Delta AFB \equiv \Delta AFS$ (L.L.L.), de unde $\sphericalangle ABF \equiv \sphericalangle ASF$. **(2)**	**3p**
Din **(1)** și **(2)** obținem $m(\sphericalangle ABD) = 2 \cdot m(\sphericalangle ADB)$ și cum, în triunghiul dreptunghic *ABD*, avem $m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle ADB) = 90^\circ$ va rezulta că $m(\sphericalangle ABD) = 60^\circ$. Deci triunghiul *ABO* este echilateral, de unde concluzionăm că $m(\sphericalangle BAO) = 60^\circ$ și prin urmare $m(\sphericalangle EAC) = 15^\circ$.	**2p**